# Gruppentheorie

Frühlingssemester 2016

Übungsblatt 2
Besprechung Fr. 29.4

1. Verwenden Sie die Cayley-Konstruktion, um einen Isomorphismus zwischen der Diedergruppe $D_3$ (siehe Blatt 1) und einer weiteren Untergruppe der $S_6$ zu erhalten.

2. In dieser Aufgabe sollen einige Relationen erarbeitet werden, welche es erlauben, die Darstellungen der Gruppe $SO(3)$ zu studieren.

   (a) Sei die Matrix $J_3$ definiert als

   $$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Zeigen sie, dass $\exp[-i\psi J_3] = R_3(\psi)$, wobei $R_3(\psi)$ die Matrix der Rotation um den Winkel $\psi$ um der $z$-Achse in $\mathbb{R}^3$ ist:

   $$R_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

   (*Hinweis:* berechnen Sie $J_3^2$ und $J_3^3$). $J_3$ wird als Generator der Rotation um der $z$-Achse bezeichnet. Analog existieren Generatoren für Rotationen um den $x$- und $y$-Achsen:

   $$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Zusammen bilden sie einen Vektorraum.

   (b) Zeigen Sie, dass folgende Beziehung zwischen den Matrizen $J_i$ gilt:

   $$[J_i, J_j] = i\epsilon^{ijk} J_k,$$

   wobei $[J_A, J_B] = J_A J_B - J_B J_A$ und $\epsilon^{ijk}$ der komplett antisymmetrische Tensor ist ($\epsilon^{123} = 1$ , $\epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik} = -\epsilon^{ikj} = -\epsilon^{kji}$). Diese Beziehung wird als die Lie-Algebra der Generatoren bezeichnet und ist lokal äquivalent mit der Gruppenmultiplikation, welche auf $SO(3)$ definiert ist.

(c) Es seien die Auf- und Abstiegsoperatoren $J_+$ und $J_-$ definiert als $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$, und der Casimir-Operator:

$$\mathbf{J^2} = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_3^2 + J_3 + J_- J_+.$$

Zeigen Sie folgende Identitäten:

$$\begin{aligned} [J_3, J_+] &= J_+, \\ [J_3, J_-] &= -J_-, \\ [J_+, J_-] &= 2J_3, \end{aligned}$$

Verwenden Sie dabei nicht die expliziten Ausdrücke für $J_i$, sondern die Lie-Algebra. Zeigen Sie damit auch:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J^2}, J_3] &= 0, \\ [\mathbf{J^2}, J_+] &= 0, \end{aligned}$$

(analog gilt auch $[\mathbf{J^2}, J_-] = 0$). Da diese Kommutatoren nur unter Verwendung der allgemein gültigen Lie-Algebra hergeleitet wurden, gelten sie auch für andere Darstellungen von $SO(3)$ als diejenige auf $\mathbb{R}^3$.