Gruppentheorie

Vorlesung H. Ita
Frühlingssemester 2016

Übungsblatt 1
Besprechung Mo. 25.4

1. Es gelten die Gruppenaxiome:

   (i) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$,

   (ii) $\exists e \in G : a \circ e = a$,

   (iii) $\exists a^{-1} \in G : a \circ a^{-1} = e \quad$,

   für alle a, b, c in einer Gruppe G. Das Symbol "$\circ$" bezeichnet die Gruppenmultiplikation. Zeigen Sie, dass dann auch

   (ii') $e \circ a = a$,

   (iii') $a^{-1} \circ a = e$,

   für alle $a \in G$ gilt.

2. Die Diedergruppe D_3 wird definiert als die Gruppe der Transformationen, welche die Figur in Abbildung 2 unverändert lassen. Sie besteht aus der Identität, den Spiegelungen an den gestrichelten Achsen und den Rotationen um 120° und 240° um den Schwerpunkt der Figur. Die Identität kann vereinheitlichend als Rotation um 360° angesehen werden.

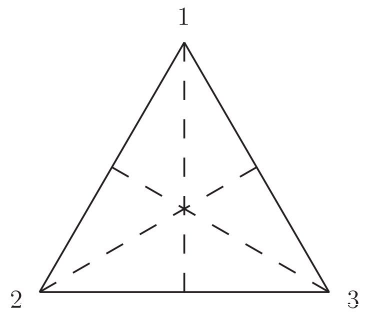

Figure 1: Eine unter D_3 symmetrische Figur

   (a) Bezeichnen Sie die sechs Symmetrietransformationen anhand von Zyklen. Die Spiegelung an der senkrechten Achse zum Beispiel bilded die Ecke "1" auf sich selbst, "2" auf "3" und "3" auf "2" ab, und wird entsprechend als (1)(23) oder einfach nur (23) bezeichnet.

(b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Gruppe nicht abelsch ist, das heisst

$$a \circ b \neq b \circ a,$$

wobei a, b zwei beliebige Elemente der Gruppe sind.

(c) Stellen Sie die Gruppenmultiplikationstabelle der Diedergruppe auf.

3. Stellen Sie die Gruppenmultiplikationstabelle der Gruppe S_3 der Permutationen der Zahlen (123) auf und überzeugen Sie sich, dass D_3 und S_3 isomorph sind. Beweisen Sie, dass S_3 eine Untergruppe von S_6 ist und verifizieren Sie damit den Satz von Cayley für D_3.