Gruppentheorie

Frühlingssemester 2016

Übungsblatt 10
Besprechung Fr. 1.7

1. Verifizieren Sie, dass der Raum aufgespannt durch die Vektoren $(x_1, x_2, 1)$ invariant ist unter einem Element der Euklidschen Gruppe E_2:

$$g(\vec{b}, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & b_1 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie auch, dass

$$g(\vec{b_2}, \theta_2) g(\vec{b_1}, \theta_1) = g(\vec{b_3}, \theta_3)$$

   gilt, mit $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ und $\vec{b_3} = R(\theta_2)\vec{b_1} + \vec{b_2}$.

2. Die Euklidsche Gruppe E_3 wird durch folgende Lie-Algebra beschrieben:

$$\begin{aligned} [P_k, P_l] &= 0, \\ [J_k, J_l] &= i\epsilon_{klm} J^m, \\ [P_k, J_l] &= i\epsilon_{klm} P^m, \end{aligned}$$

   wobei P_k, J_l die Generatoren von Translationen beziehungsweise Rotationen sind. Verwenden Sie die Lie-Algebra, um zu zeigen, dass $\mathbf{P}^2$ und $\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}$ Casimir-Operatoren der E_3 sind (d.h. mit allen Generatoren der E_3 kommutieren). Zeigen Sie ausserdem, dass $\mathbf{J}^2$ kein Casimir-Operator der E_3 ist.

3. In dieser Aufgabe soll der Zusammenhang zwischen der Basis $|p, \phi\rangle$ und $|p, m\rangle$ der Euklidschen Gruppe E_2 hergestellt werden. Sei der Vektor $|p, \tilde{m}\rangle$ definiert als

$$|p, \tilde{m}\rangle = \int_0^{2\pi} R(\phi)|\vec{p}_0\rangle e^{im\phi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |p, \phi\rangle e^{im\phi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi},$$

   wobei p^2 der Eigenwert zum Operator $\mathbf{P}^2$ ist.

   (a) Zeigen Sie, dass $|p, \tilde{m}\rangle$ ein Eigenvektor von J zum Eigenwert m ist, und dass $|p, m\rangle$ und $|p, \tilde{m}\rangle$ somit proportional sind.

   (b) Berechnen Sie den Skalarprodukt $\langle p, m|p, \tilde{m}\rangle$ und zeigen Sie, dass sich $|p, m\rangle$ und $|p, \tilde{m}\rangle$ höchstens um eine Phase unterscheiden.

(c) Zeigen Sie, dass

$$P_{\pm}|p,\tilde{m}\rangle = p|p,\tilde{m}\pm 1,\rangle$$

mit den Auf- und Abstiegsoperatoren $P_{\pm} = P_1 \pm iP_2$.
(*Hinweis:* Die Generatoren der Translationen verhalten sich wie Komponenten eines Vektors unter Rotationen: $e^{-i\theta J}P_k e^{i\theta J} = P_m R(\theta)^m_k$).

(d) Zeigen Sie, dass

$$|p,m\rangle = |p,\tilde{m}\rangle i^m = \int_0^{2\pi} |p,\phi\rangle e^{im(\phi+\frac{\pi}{2})}\frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}.$$

Vergleichen Sie dazu das Resultat aus c) mit der Wirkung der Auf- und Abstiegsoperatoren auf $|p,m\rangle$ und finden Sie eine Beziehung für die Phase zwischen $|p,m\rangle$ und $|p,\tilde{m}\rangle$ für verschiedene Werte von m.

4. Es seien folgende Matrizen gegeben:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2\times 2} \\ \mathbb{1}_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

wobei σ^i die Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sind. Verifizieren Sie, dass die Matrizen γ^μ die Clifford-Algebra aus Blatt 9, Aufgabe 2 erfüllen und berechnen Sie die 6 sechs unabhängigen Generatoren $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Welches ist der Zusammenhang zwischen den Generatoren für $\mu,\nu = 1,2,3$ und einer bestimmten Darstellung der $SO(3)$?