# Gruppentheorie

Frühlingssemester 2016

Übungsblatt 3
Besprechung Fr. 6.5

---

1. Sei $G$ eine Gruppe und $U$ und $V$ zwei Untergruppen. Beweisen Sie:
   (a) $U \cap V$ ist eine Untergruppe.
   (b) $U \cup V$ ist genau dann eine Untergruppe, wenn $U \subset V$ oder $V \subset U$.
2. Zeigen Sie, dass die Zyklische Gruppe $C_6$ isomorph zu $C_3 \otimes C_2$ ist.
3. Sei eine Gruppe $G = H_1 \otimes H_2$. Beweisen Sie, dass die Faktorgruppe $G/H_1$ isomorph zu $H_2$ ist (und $G/H_2$ isomorph zu $H_1$).
4. Die Gruppe $D_4$ der Symmetrien eines Quadrats besteht aus acht Elementen: der Identität, den Spiegelungen an den waag- und senkrechten Achsen (12)(34) und (14)(23), den Spiegelungen an den Diagonalen (13) und (24) sowie den Drehungen um 90°, 180° und 270° (1432), (13)(24) und (1234).

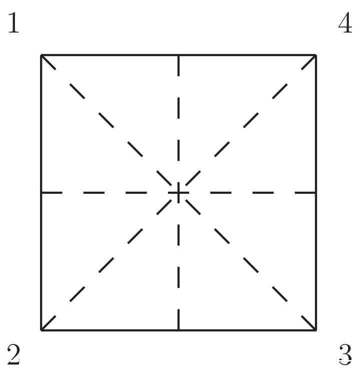


Figure 1: Eine unter $D_4$ symmetrische Figur

Zählen Sie alle Untergruppen und Klassen auf. Welche Untergruppen sind invariant? Schreiben Sie ebenfalls die Faktorgruppen auf. Lässt sich $D_4$ als direktes Produkt zweier Untergruppen schreiben? Siehe Gruppenmultiplikationstabelle nächste Seite.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | (12)(34) | (14)(23) | (13) | (24) | (1432) | (13)(24) | (1234) |
| (12)(34) | $e$ | (13)(24) | (1432) | (1234) | (13) | (14)(23) | (24) |
| (14)(23) | (13)(24) | $e$ | (1234) | (1432) | (24) | (12)(34) | (13) |
| (13) | (1234) | (1432) | $e$ | (13)(24) | (14)(23) | (24) | (12)(34) |
| (24) | (1432) | (1234) | (13)(24) | $e$ | (12)(34) | (13) | (14)(23) |
| (1432) | (24) | (13) | (12)(34) | (14)(23) | (13)(24) | (1234) | $e$ |
| (13)(24) | (14)(23) | (12)(34) | (24) | (13) | (1234) | $e$ | (1432) |
| (1234) | (13) | (24) | (14)(23) | (12)(34) | $e$ | (1432) | (13)(24) |

Figure 2: Gruppenmultiplikationstabelle der $D_4$.