Gruppentheorie

Frühlingssemester 2016 — Übungsblatt 4, Besprechung Mo. 23.5

1. Zeigen Sie, dass die zweidimensionale Darstellung der Rotationsgruppe $R(2)$ reduzibel ist. Betrachten Sie dazu die Transformation zu einer Basis aus komplexen Vektoren
$$\vec{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp\vec{e}_1 - i\vec{e}_2),$$
wobei $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ die übliche Basisvektoren in $\mathbb{R}^2$ sind.
   (a) Finden Sie die invarianten Unterräume des Darstellungsraumes.
   (b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix in der neuen Basis und zeigen Sie, dass sie diagonal ist. Verifizieren Sie ausserdem, dass die Spur der Darstellungsmatrix in beiden Basen gleich ist.

2. Berechnen Sie die sechs Matrizen der zweidimensionalen Darstellung der Diedergruppe D_3 aus. Betrachten Sie dazu wie die Basisvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ von $\mathbb{R}^2$ unter den Elementen in D_3 transformieren.

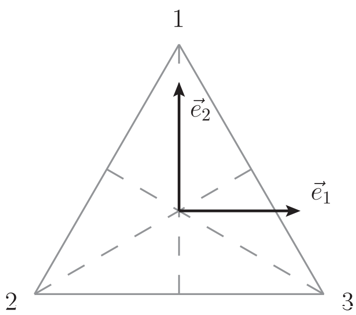

Figure 1: Anwendung der Elemente in D_3 auf die Basisvektoren von $\mathbb{R}^2$

3. Verifizieren Sie, dass die Matrix
$$D(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
eine zweidimensionale Darstellung der zyklischen Gruppe $C_3 = \{c, c^2, c^3 = e\}$ generiert. Beweisen Sie, dass die Darstellung über den reellen Zahlen irreduzibel ist. (*Hinweis*: welche Eigenschaften einer Matrix bleiben bei einer Ähnlichkeitstransformation erhalten?)

4. Die Permutationsgruppe S_3 enthält eine invariante Untergruppe $K = \{e, (123), (321)\}$, so dass die entsprechende Faktorgruppe isomorph zur zyklischen Gruppe $C_2 = \{e, a\}$ ist. Die Darstellung

$$\{e, a\} \xrightarrow{d} \{1, -1\}$$

der Gruppe C_2 induziert dann eine Darstellung auf S_3.

   (a) Auf welchen Werten werden die Elemente von S_3 abgebildet?

   (b) Verifizieren Sie, dass die induzierte Darstellung die Gruppenmultiplikation von S_3 erhält.