Gruppentheorie

Frühlingssemester 2016

Übungsblatt 5
Besprechung Fr. 27.5

1. Sei $D(G)$ eine Darstellung einer endlichen Gruppe G auf einem Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot \rangle$. Beweisen Sie, dass

$$(x \cdot y) = \sum_{g \in G} \langle D(g)x \cdot D(g)y \rangle$$

für $x, y \in V$ ein neues Skalarprodukt auf V definiert.

2. Beweisen Sie mittels Schurs erstem Lemma, dass irreduzible Darstellungen von abelschen Gruppen stets eindimensional sind.

3. Zeigen Sie, dass die Orthogonalitätsbeziehung zwischen irreduziblen Darstellungen

$$\frac{n_\mu}{n_G} \sum_{g \in G} D^\dagger_\mu(g)^k{}_i D^\nu(g)^j{}_l = \delta^\nu_\mu \delta^j_i \delta^k_l$$

sich im Falle von abelschen Gruppen zu

$$\frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} d^\dagger_\mu(g) d^\nu(g) = \delta^\nu_\mu$$

vereinfacht, wobei $d(g)$ komplexe Zahlen sind.

4. Betrachten Sie die zyklische Gruppe $C_2 = \{a, a^2 = e\}$.

   (a) Wie viele inequivalente irreduzible Darstellungen von C_2 gibt es?

   (b) Die triviale irreduzible Darstellung der C_2 ist

$$\{e, a\} \xrightarrow{d} \{1, 1\}.$$

   Verwenden Sie Aufgabe 3, um die restlichen inequivalenten irreduziblen Darstellungen zu finden.

5. Beweisen Sie die Vollständigkeitsrelation für Charaktere:

$$\frac{n_i}{n_G} \sum_{\mu} \chi^\mu_i \chi^{\dagger j}_\mu = \delta^j_i .$$

Verwenden sie dabei die Tatsache, dass die Summe einer irreduziblen Darstellung $U^\mu(G)$ einer Gruppe G über alle Elemente einer Klasse ζ_i von G

$$\sum_{h\in\zeta_i} U^\mu(h) = \frac{n_i}{n_\mu}\chi_i^\mu E$$

ist, wobei E die Einheitsmatrix ist.

6. Stellen Sie die Charaktertafel für die Gruppe S_3 auf:

   (a) S_3 enthält drei Klassen, $\{(e)\}$, $\{(12),(23),(31)\}$ und $\{(123),(321)\}$. Wie viele inequivalente irreduzible Darstellungen hat die Gruppe?

   (b) Eine irreduzible Darstellung ist die triviale eindimensionale Darstellung

   $$g \in S_3 \xrightarrow{D^1} 1.$$

   Eine weitere eindimensionale irreduzible Darstellung erhalten Sie aus Aufgabe 4 im Übungsblatt 4. Geben Sie die Charaktere dieser beiden Darstellungen an.

   (c) Welche Dimension hat die letzte Darstellung D^3? Bestimmen Sie daraus den Charakter von $D^3(e)$.

   (d) Verwenden Sie die Orthogonalität und Vollständigkeit der Charaktere irreduzibler Darstellungen um die fehlenden Charaktere zu bestimmen.

7. Bestimmen Sie die Matrizen der regulären Darstellung von $C_2 = \{a, a^2 = e\}$.