Gruppentheorie

Frühlingssemester 2016

Übungsblatt 7
Besprechung Fr. 10.6

---

1. Sei die Transformation
$$x \to ax + b,$$
welche von den kontinuierlichen Parametern a und b abhängt. Bestimmen Sie die Generatoren Γ_a und Γ_b der entsprechenden Gruppe sowie die Lie-Algebra $[\Gamma_a, \Gamma_b]$ ($[\ ,\ ]$ bezeichnet den Kommutator).

2. Die Gruppe $O(2)$ besteht aus den Drehungen $R(\phi)$ um die z-Achse und zusätzlich einer Spiegelung an einer Ebene, welche die z-Achse enthält.

   (a) Sei S die Spiegelung an der x-z-Ebene. Zeigen Sie, dass $S^{-1}R(\phi)S = R(-\phi)$ und dass die Gruppe somit im Gegensatz zu $SO(2)$ nicht abelsch ist.

   (b) Begründen Sie, warum es für $m \neq 0$ notwendig ist, die irreduziblen Darstellungen $D^{(m)}$ und $D^{(-m)}$ der $SO(2)$ zu kombinieren, um eine irreduzible Darstellung der $O(2)$ zu erhalten. Finden Sie die entsprechenden Darstellungsmatrizen und berechnen Sie deren Charaktere.

3. Die eigentliche Lorentzgruppe (Lorentztransformationen mit Determinante 1) hat sechs Generatoren: drei Rotationen J_n und drei Boosts K_n. Diese erfüllen folgende Lie-Algebra:
$$\begin{aligned}[J_m, J_n] &= i\epsilon^{mnl} J_l,\\ [K_m, J_n] &= i\epsilon^{mnl} K_l,\\ [K_m, K_n] &= -i\epsilon^{mnl} J_l,\end{aligned}$$
wobei ϵ^{mnl} der total antisymmetrische Tensor mit drei Indizes ist. Es kann gezeigt werden, dass unter dem Basiswechsel
$$\begin{aligned}M_m &= \frac{J_m + iK_m}{2}\\ N_m &= \frac{J_m - iK_m}{2},\end{aligned}$$
die Lie-Algebra als das direkte Produkt zweier Subalgebren beschrieben werden kann. Berechnen Sie die Kommutatoren $[M_m, M_n]$, $[N_m, N_n]$ und $[M_m, N_n]$.

4. Der Pauli-Lubanski-Vektor ist definiert durch:

$$W^\lambda = \epsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} J_{\mu\nu} P_\sigma / 2,$$

wobei $J_{mn} = \epsilon^{mnk} J_k$, $J_{m0} = K_m$ (siehe Aufgabe 3) und null sonst (römische Buchstaben bezeichnen Indizes von eins bis drei, griechische Buchstaben Indizes von null bis drei). P_μ sind die Generatoren der Translationsgruppe und erfüllen folgende Kommutationsrelationen:

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0, \\
[P_\mu, J_{\nu\rho}] &= i(P_\nu g_{\mu\rho} - P_\rho g_{\mu\nu}), \\
[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= i(J_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} - J_{\sigma\nu} g_{\mu\rho} + J_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - J_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}).
\end{aligned}$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $W^\mu P_\mu = 0$.

(b) $[W^\mu, P^\nu] = 0$.

(c) $[W^\rho, J^{\mu\nu}] = i(W^\mu g^{\rho\nu} - W^\nu g^{\mu\rho})$.

(d) $[W^\rho, W^\sigma] = i\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} W_\mu P_\nu$.