Gruppentheorie

Frühlingssemester 2016 | Übungsblatt 8
Besprechung Fr. 17.6

1. (a) Verifizieren Sie, dass die Rotationsmatrix

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

orthogonal ist. Zeigen Sie ausserdem, dass jede $SO(2)$-Matrix eine Rotation in der Ebene darstellt.

   (b) Zeigen Sie, dass für die Rotationsmatrizen in 3 Dimensionen aus $\vec{x}' = R(\phi)\vec{x}$ und $|\vec{x'}|^2 = |\vec{x}|^2$ die Beziehung $RR^T = E$ folgt.

2. Beweisen Sie, dass die Generatoren J_k von $SO(3)$ unter einer beliebigen Rotation R wie

$$RJ_kR^{-1} = J_l R^l_k$$

transformieren. Die rechte Seite ist als Multiplikation eines Vektors von Generatoren J_k , $k = 1, 2, 3$ mit der Matrix R zu interpretieren. Verwenden Sie dabei die explizite Darstellung der Generatoren sowie die Zerlegung

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_3(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma)$$

einer Rotation, welche von den Eulerwinkel α, β, γ abhängt. Dabei sind

$$R_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad R_2(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

3. Beweisen Sie, dass der Generator einer Rotation um einer beliebigen Achse $\vec{n} = n^k \vec{e}_k$ als

$$J_{\vec{n}} = J_k n^k$$

geschrieben werden kann. Verwenden Sie dabei Aufgabe 2 und betrachten Sie die Rotationsmatrix, welche $\vec{e}_3$ nach $\vec{n}$ abbildet.

4. Beweisen Sie, dass die Wirkung einer Rotation $R_{\vec{n}}(\phi)$ auf einem beliebigen Vektor $\vec{r}$ als

$$R_{\vec{n}}(\phi)\vec{r} = \vec{r}\cos(\phi) + \vec{n}(1 - \cos(\phi))(\vec{r} \cdot \vec{n}) + \vec{n} \times \vec{r} \sin\phi$$

geschrieben werden kann. Erzeugen Sie dabei ein orthonormales Koordinatensystem aus $\vec{r}$ und $\vec{n}$ und drücken Sie $\vec{r}$ und $\vec{r}' = R_{\vec{n}}(\phi)\vec{r}$ in dieser neuen Basis aus.