Gruppentheorie

Frühlingssemester 2016

Übungsblatt 9
Besprechung Fr. 24.6

1. Verifizieren Sie, dass der Kommutator [,] die Jacobi-Identität erfüllt:

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]].$$

2. Sei eine Menge von $(n\times n)$-Matrizen γ_i, welche folgende Eigenschaft erfüllen:

$$\{\gamma_a,\gamma_b\}=2\cdot\mathbb{1}_{n\times n}\eta_{ab},$$

wobei $\{a,b\}=ab+ba$ der Antikommutator ist.

   (a) Zeigen Sie, dass für Matrizen $\sigma_{ab}=\frac{1}{4}[\gamma_a,\gamma_b]$ folgendes gilt:

$$[\sigma_{ab},\gamma_c]=(\gamma_a\eta_{bc}-\gamma_b\eta_{ac}).$$

   (b) Verwenden Sie die in a) bewiesene Eigenschaft um zu zeigen, dass die Matrizen σ_{ab} die Lie-Algebra der Lorentzgruppe erfüllen:

$$[\sigma_{ab},\sigma_{cd}]=\big(\sigma_{ad}\eta_{bc}-\sigma_{ac}\eta_{bd}+\sigma_{bc}\eta_{ad}-\sigma_{bd}\eta_{ac}\big).$$

3. Die symplektische Gruppe $USp(2n)$ besteht aus allen unitären $(2n\times 2n)$-Matrizen, welche eine bestimmte Matrix A_0 invariant lassen:

$$S^{\mathrm{T}}A_0S=A_0 \qquad , \qquad A_0=\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{n\times n} \\ -\mathbb{1}_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}.$$

In einer infinitesimalen Umgebug der Einheit lässt sich eine solche Matrix als

$$S=\mathbb{1}+iH$$

schreiben, wobei die infinitesimale Matrix H folgende Eigenschaften erfüllt:

$$H^\dagger=H \qquad , \qquad H^{\mathrm{T}}A_0+A_0H=0.$$

Beweisen Sie daraus, dass H die Gestalt

$$H=\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & -A^* \end{pmatrix},$$

mit Matrizen $A=A^\dagger$ und $B=B^{\mathrm{T}}$, hat.

4. Man betrachte eine (Lie-)Gruppe von Transformationen $T(\theta)$, welche von mehreren kontinuierlichen Parametern θ^a abhängt, wobei $\theta^a = 0$ die Einheit repräsentiert. Aus der Gruppenmultiplikation erhält man

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(f(\bar{\theta}, \theta)).$$

wobei die Funktion $f^a(\bar{\theta}, \theta)$ die Bedingungen

$$f^a(\theta, 0) = f^a(0, \theta) = \theta^a$$

erfüllt. Diese bestimmen die Entwicklung von f,

$$f^a(\bar{\theta}, \theta) = \theta^a + \bar{\theta}^a + f^a_{bc}\bar{\theta}^b\theta^c + \dots$$

mit Koeffizienten f^a_{bc}. Die Gruppe werde auf einem bestimmten Vektorraum durch Operatoren $U\big(T(\theta)\big)$ dargestellt. Diese können in einer Umgebung der Einheit als eine Potenzreihe geschrieben werden:

$$U\big(T(\theta)\big) = 1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c t_{bc} + \dots,$$

wobei t_a, t_{bc} Operatoren auf dem Darstellungsraum sind. Die Gruppenmultiplikation im Darstellungsraum verlangt, dass

$$U\big(T(\bar{\theta})\big)U\big(T(\theta)\big) = U\big(T(f(\bar{\theta}, \theta))\big).$$

Entwickeln sie diesen Ausdruck zur zweiten Ordnung in $\bar{\theta}, \theta$ und zeigen Sie, dass

$$t_{bc} = -t_b t_c - i f^a_{bc} t_a.$$

Da t_{bc} die zweite Ableitung von $U\big(T(\theta)\big)$ nach θ_b und θ_c ist, muss der Operator t_{bc} symmetrisch sein. Schliessen Sie daraus, dass

$$[t_b, t_c] = iC^a_{bc}t_a \qquad , \qquad C^a_{bc} = -f^a_{bc} + f^a_{cb}$$

gilt.