Übungen ART WS 2014

Aufgabe 1 *Krümmung und Metrik*

Die Krümmung einer Fläche kann man an Winkelsumme von Dreiecken und auch an den Längen von "geraden" Verbindungslinien von vier Punkten erkennen. Analysieren sie dazu eine Zweisphäre. Geben sie Beispiele für Dreiecke deren Winkelsumme nicht π ergibt.

Weiters geben sie ein Beispiel für vier Punkte und deren Verbindungslinien, die nicht in der Ebene gezeichnet werden können.

(Die geraden Linien auf der Zweisphäre sind Großkreise oder Segmente davon.)

Aufgabe 2 *Vergleich von Kreisen*

Die Metrik der zweidimensionalen Sphäre und des flachen Raumes sind durch

$$ds^2 = dr^2 + \sin^2 r d\phi^2\,, \quad ds^2 = dr^2 + r^2\, d\phi^2\,, \tag{1}$$

gegeben mit $\phi \in [0, 2\pi)$ und der "radialen" Koordinate r im geschlossenen Interval $r \in [0, \pi]$ für die Sphäre und $r \in [0, \infty)$ für den flachen euklidischen Raum.

Ziel des Beispiels ist es, Kreise mit festem $r = r_0$ zu analysieren. Wie verhält sich der Umfang (U) der Kreise zur Länge (R) der Radien? Man diskutiere die Verhältnisse $f(r_0) = U/R$. Zur Berechnung sind die entsprechenden Kurven zu parametrisieren, der Pull Back der Metrik und die Volumsformen $d\mu$ zu konstruieren und über die vier Kurven (zwei Kreise und deren Radien) zu integrieren.

Was lässt sich bei kleinen Werte von $r_0 << 1$ und bei r π für $f(r_0) = U/R$ beobachten?

Aufgabe 3 *Pull Back der Metrik*

Die Zweisphäre kann durch die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ in den flachen dreidimensionalen Raum mit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ eingebettet werden.

Parametrisieren sie die Zweisphäre mittels der Koordinaten $(x^1, x^2) = (x, y)$ und berechnen sie den Pull Back der Metrik als Funktion der Koordinaten x^1 und x^2.

Im Weiteren sollen zur Vereinfachung polare Koordinaten eingeführt werden mit $x^1 = r\cos\phi$ und $x^2 = r\sin\phi$. Zeigen sie, dass die Metrik durch $ds^2 = dr^2/(1-r^2) + r^2 d\phi^2$ gegeben ist.

Die Sphäre ist eine glatte Fläche, trotzdem ist die Metrik in diesen Koordinaten singulär bei $r \to 1$. Wie ist diese sogenannte Koordinatensingularität zu erklären?

Die Metrik der Sphäre ist ebenso durch $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ gegeben. Durch welche Transformation stehen (θ, ϕ) und (r, ϕ) in Verbindung?

Aufgabe 4 *Wurmloch Metrik*

Die sogenannte Einstein Rosen Brücke (oder Wurmloch Geometrie) besteht aus zwei Ebenen, die durch eine schlauchartige Fläche verbunden sind. In zylindrischen Koordinaten ist die Euklidische Metrik des Einbettungsraumes durch $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$

gegeben. Die Einstein Rosen Brücke ist durch die Fläche $z^2 = 4r_s(r - r_s)$ beschrieben. (Die Grösse des Wurmlochs ist durch den Parameter r_s charakterisiert.)

Skizzieren sie die Fläche und berechnen sie deren Metrik. Es ist zu berücksichtigen, dass die quadratische Gleichung der Fläche zwei Lösungen hat, die den zwei Teilen der Wurmloch Geometrie entsprechen.

Die Metrik ist bei $r = r_s$ singulär. Woher rührt diese Singularität?

Berechnen sie die Grösse des Wurmlochs, die mit der Länge des Kreises $\phi \in (0, 2\pi]$ bei $r = r_s$ gleichzusetzen ist.

Diskutieren sie die Metrik für große Werte der radialen Koordinate $r >> r_s$ und zeigen sie, dass sie gegen die flache Metrik in Polarkoordinaten strebt.