Übungen ART WS 2014

Aufgabe 5 *Christoffel Symbole und zweite fundamentale Form*

Ziel der Aufgabe ist es die Christoffel Symbole und die zweite fundamentale Form für die Zweisphäre zu berechnen, die wie folgt definiert sind,

$$\partial_\mu \vec{e}_\nu = \Gamma^\rho_{\mu\nu} \vec{e}_\rho + K_{\mu\nu} \vec{n} \,, \tag{1}$$

mit,

$$\vec{e}_\mu := \partial_\mu \vec{X} \,, \quad \text{und} \quad \vec{n} := \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|} \,. \tag{2}$$

Die Einbettung der Sphäre in den dreidimensionalen euklidischen Raum ist durch $\vec{X}(\theta, \phi) = (R \sin\theta \cos\phi, R \sin\theta \sin\phi, R \cos\theta)$ anzunehmen.

Geben Sie zuerst die Darstellung der Tangentialvektoren ($\vec{e}_\mu$) und des Normalvektors ($\vec{n}$) an und berechnen Sie $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ und $K_{\mu\nu}$.

Die intrinsische Krümmung $\mathcal{G}$ und die extrinsische Krümmung $\mathcal{S}$ können aus den Eigenwerten des Tensors $K_{\mu\nu}$ berechnet werden. Berechnen Sie die Werte der Krümmungen mit,

$$\mathcal{G} = \det\left(g^{-1} K\right) \,, \quad \mathcal{S} = \left[\frac{1}{2} tr(g^{-1} K)\right]^2 \,. \tag{3}$$

Aufgabe 6 *Fehlende extrinsische Krümmung in Metrik*

Gehen Sie von der Fläche $z(x, y) = \frac{1}{2}\mu x^2 + \frac{1}{2}\nu y^2$ im dreidimensionalen euklidischen Raum ($ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$) aus und berechnen Sie die Metrik der Fäche.

Die extrinsische Krümmung ist durch $(\mu + \nu)^2/4$ und die intrinsische Kümmung durch $(\mu\nu)$ gegeben. Nehmen Sie eine allgemeine Taylor Entwicklung fër die Koordinatentransformation um $(x, y) = (0, 0)$ an,

$$x = u + a_1 u^3 + a_2 u^2 v + a_3 u v^2 + a_4 v^3 + \ldots \,, \tag{4}$$

$$y = v + b_1 u^3 + b_2 u^2 v + b_3 u v^2 + b_4 v^3 + \ldots \,, \tag{5}$$

und zeigen Sie, dass die Metrik zur quadratischen Ordnung auf euklidische Form gebracht werden kann bis auf Terme, die von der intrinsischen Krümmung abhängen. Die Abhängigkeit von der extrinsischen Krümmung fällt zu dieser Ordnung heraus.

Aufgabe 7 *Transformationsverhalten der Christoffel Symbole*

Führen Sie einen Koordinatenwechsel durch und berechnen Sie das Transformationsverhalten der Christoffel Symbole und der 2^{ten} fundamentalen Form anhand der Gleichungen,

$$\partial'_\mu \vec{e}'_\nu = \Gamma'^\rho_{\mu\nu} \vec{e}'_\rho + K'_{\mu\nu} \vec{n}' \,, \tag{6}$$

$$\vec{e}'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}(x') \vec{e}_\nu(x(x')) \quad \text{and} \quad \vec{e}_\mu(x) = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}(x) \vec{e}'_\nu(x') \,. \tag{7}$$

Transformieren $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ und/oder $K_{\mu\nu}$ wie Tensoren?

Aufgabe 8 *Metrik und Christoffel Symbole*

Für eine eingebettete Fläche ergibt sich die Metrik aus dem inneren Produkt der Tangentialvektoren,

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = d\vec{X}(x) \cdot d\vec{X}(x) \,, & (8) \\ & g_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{X}(x) \cdot \partial_\nu \vec{X}(x) = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu \,. & (9) \end{aligned}$$

Drücken Sie die partiellen Ableitungen der Metrik mittels der Christoffel Symbole aus, indem Sie die Gleichung,

$$\partial_\mu \vec{e}_\nu = \Gamma^\rho_{\mu\nu} \vec{e}_\rho + K_{\mu\nu} \vec{n} \,, \tag{10}$$

verwenden.

Zeigen Sie, dass die Christoffel Symbole wie folgt aus der Metrik berechnet werden können,

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \,. \tag{11}$$

Verwenden Sie die allgemeine Entwicklung einer Metrik um den Punkt $x^\mu = (0, 0, ...0)^\mu$,

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(0) + A_{\mu\nu\lambda} x^\lambda + ... \,, \quad g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(0) + \mathcal{O}(x) \,, \tag{12}$$

und drücken Sie die Parameter $A_{\mu\nu\lambda}$ durch $\Gamma^\rho_{\mu\nu}(0)$ und $g^{\mu\nu}(0)$ aus. Lassen sich die Christoffel Symbole durch geeignete Koordinatenwahl lokal wegtransformieren?

Nehmen Sie einen Tensor an, der am Punkt $x^\mu = (0, 0, ...0)^\mu$ nicht verschwindende Kompone hat. Lässt sich der Tensor durch geeeignete Koordinatenwahl an diesem Punkt in einem anderen Koordinatensystem zum Verschwinden bringen?