Übungen ART WS 2014

Aufgabe 9 *Christoffel Symbole*

Ziel der Aufgabe ist es, die Christoffel Symbole der Sphäre und des flachen zweidimensionalen Raumes (in Polarkoordinaten) zu berechnen. Vergleichen Sie dazu die Differentialgleichungen (Euler-Lagrange Gleichungen) des Variationsproblems der Weglänge,

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\phi^2\,, \quad \mathcal{D} = \int \sqrt{dr^2 + f^2(r)d\phi^2}\,. \tag{1}$$

mit der Geodätengleichung,

$$\frac{d^2x^\rho}{dl^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}(x(l))\frac{dx^\mu}{dl}\frac{dx^\nu}{dl} = 0\,. \tag{2}$$

Die Funktion $f(r)$ kann am Ende der Rechnung eingesetzt werden; $f(r) = \sin r$ für die Sphäre und $f(r) = r$ für die Ebene.

Setzen Sie dazu die Kurvenparametrisierung $(r, \phi) = (r(\lambda), \phi(\lambda))$ ein und leiten Sie die Differntialgleichungen des Variations Problems ab.

Ersetzen Sie erst nach der Variation den Kurvenparameter λ mit der Bogenlänge. Wie vereinfachen sich die Gleichungen?

Wieviele unabhängige Christoffel Symbole gibt es? Geben Sie ihre Werte an.

Aufgabe 10 *Transformation der Christoffel Symbole*

Gehen Sie von der Geodäten Gleichung der Ebene in kartesischen Koordinaten $ds^2 = dx^2 + dy^2$ aus. Transformieren Sie diese Gleichung in ein allgemenes Koordinatensystem indem Sie die Kurve in neuen Koordinaten einsetzen; $x^\mu(l) \to x^\mu(x'(l))$.

Setzen Sie nun explizit die Transformation zu Polarkoordinaten $x = r\sin\phi$ und $y = r\cos\phi$ ein und geben Sie die Christoffel Symbole an.

Aufgabe 11 *Zwillingsparadoxon*

Die biologische Zeit oder Eigenzeit ist durch die Länge der Weltlinie gegeben,

$$\tau = \int_{\text{Weltlinie}} \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}\,. \tag{3}$$

Nehmen Sie an, dass ein Zwilling in Ruhe bleibt $(t, x, y, z) = (\lambda, 0, 0, 0)$ während der zweite parabolisch verreist; er reist zum Ereignis $(t, x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$ ab und kehrt zum Ereignis $(t, x, y, z) = (2\bar{t}, 0, 0, 0)$ zurück,

$$\begin{aligned} &t(\lambda) = \bar{t} + \frac{1}{a}\sinh\left(a(\lambda - \bar{\lambda})\right)\,, \quad x(\lambda) = \bar{x} - \frac{1}{a}\cosh\left(a(\lambda - \bar{\lambda})\right)\,, \quad y(\lambda) = 0\,, \quad z(\lambda) = 0\,, \\ &\bar{t} = \frac{1}{a}\sinh\left(a\bar{\lambda}\right)\,, \quad \text{und} \quad \bar{x} = \frac{1}{a}\cosh\left(a\bar{\lambda}\right)\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Skizzieren Sie seine Weltlinie in der t-x Ebene. Wieviel Zeit vergeht für den reisenden Zwilling? Wieviel für den zurückbleibenden Zwilling.

Aufgabe 12 *Schwarzschild Metrik*
Die Schwarzschild Metrik,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \,. \tag{5}$$

beschreibt die gekrümmte Raumzeit des Vakuums um eine zentrale Massenverteilung oder auch um ein schwarzen Loch. Der Parameter $r_s = 2G_N M/c^2$ wird als Schwarzschildradius bezeichnet und enthält die Massenabhängigkeit der Geometrie. Berechnene Sie die Schwarzschildradien der Erde, Sonne, des Elektrons und des Protons und vergleichen Sie diese mit der tatsächliche Ausdehnung dieser Objekte.

Es ist hilfreich, sich die Raumzeit zu veranschaulichen, indem man einen (raumartigen) Schnitt mit $t = t_0$ untersucht. Berechnen Sie das "pull back" der Metrik auf die Fläche $t = t_0$.

Zeigen Sie, dass die Metrik für grosse r ($r >> r_s$) gegen die flache Metrik in Kugelkoordinaten konvergiert.

Weiters kann man diese Geometrie mit einer 3-dimensionalen Fläche im 4-dimensionalen euklidischen Raum vergleichen. Gehen Sie von der flachen Metrik in Zylinderkoordinaten aus,

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \,, \tag{6}$$

und konstruieren Sie eine Fläche $z(r) = f(r)$ mit einer geeigneten Funktion $f(r)$ so, dass die Metrik auf dieser Fläche die Form der Schwarzschild Metrik für $t = 0$ annimmt. Zeichnen Sie die Fläche $(z(r), r, \phi)$ im 3-dimensionalen Raum für $r > r_s$.