Übungen ART WS 2014

Aufgabe 13 *Lie Gruppen*

Lie Gruppen sind Geometrien für deren Punkte als zusätzlicher Struktur Multiplikationsregeln definiert sind. (Zum Beispiel können jedem Punkt der Geometrie eine Matrix zugeordnet werden und die Multiplikation durch Matrix-Multiplikation definiert sein.) Hier geht es vor allem um die geometrischen Eigenschaften der Rotationsgruppe $SU(2) \sim SO(3)$.

Eine dreidimensionale Einheitssphäre kann in den vierdimensionalen Raum durch folgende Parametrisierung eingebettet werden,

$$x^1 + i\,x^2 = e^{i\phi}\cos(\theta)\,, \quad x^3 + i\,x^4 = e^{i\psi}\sin(\theta)\,. \tag{1}$$

Verifizieren Sie $\sum_i (x^i)^2 = 1$. Berechnen Sie Metrik und Volumenelement auf der Sphäre.

Eine zweidimensionale Darstellung der speziellen unitären Gruppe $SU(2)$ ist durch folgende Matrix gegeben,

$$M(\phi,\psi,\theta) = \begin{pmatrix} x^1 + i\,x^2 & x^3 + i\,x^4 \\ -x^3 + i\,x^4 & x^1 - i\,x^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

wobei die Winkel ϕ, ψ und θ aus (1) eingesetzt die Drehmatrizen parametrisieren. Verifizieren Sie, dass $det(M) = 1$ (die Definition einer speziellen Gruppe) und $MM^\dagger = 1$ (die Eigenschaft einer unitären Gruppe).

Die Metrik der Gruppe ist durch,

$$dM := \begin{pmatrix} dz^1 & dz^2 \\ dz^3 & dz^4 \end{pmatrix}\,, \tag{3}$$

$$ds^2 = \frac{1}{2} tr\left(dM^\dagger \cdot dM\right)\,. \tag{4}$$

gegeben wobei für z^i die Parametrisierung (2) eingesetzt werden muss. Berechnen Sie die Metrik und verifizieren Sie, dass sie mit der Metrik der Dreisphäre übereinstimmt.

Aufgabe 14 *Noether Theorem*

Gehen Sie von der Wirkung eines freien Teilchens in der Schwarzschild Geometrie aus,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\,, \tag{5}$$

$$S = -m \int \sqrt{-(g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2)}\,. \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass Zeittranslationen $\{t(\lambda), r(\lambda), \theta(\lambda), \phi(\lambda)\} \to \{t(\lambda) + \epsilon_t, r(\lambda), \theta(\lambda), \phi(\lambda)\}$ und Rotationen $\{t(\lambda), r(\lambda), \theta(\lambda), \phi(\lambda)\} \to \{t(\lambda), r(\lambda), \theta(\lambda), \phi(\lambda) + \epsilon_\phi\}$ Symmetrien der Wirkung sind. Berechnen Sie die assoziierten Erhaltungsgrössen.

Aufgabe 15 *Geodäten*

Leiten Sie die Geodätengleichung der Zweisphäre,

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\,, && (7)\\
\mathcal{D} &= \int ds,\,, && (8)
\end{aligned}
$$

ab und diskutieren Sie deren Lösungen.

Aufgabe 16 *Lichtkegel im gekrümmten Raum*

Ziel der Aufgabe ist es, sich Lichtstrahlen im flachen Raum zu veranschaulichen, um dannach deren Eigenschaften in der Geometrie eines schwarzen Loches zu analysieren.

- Gehen Sie zunächst von der Minkowski Metrik des flachen Raumes aus,

  $$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\,, \tag{9}$$

  und geben Sie die Parametrisierung eines Lichtstrahls durch den Ursprung und in x-Richtung an; geben Sie sowohl die vier Funktionen $x^\mu(\lambda)$ als auch den Tangentialvektor $t^\mu = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}$ an. Verifizieren Sie, dass der Strahl tatsächlich lichtartig ist; $g_{\mu\nu}t^\mu t^\nu = 0$.

- Gehen Sie nun zu sphärischen Koordinaten über und geben Sie die Metrik in diesen Koordinaten an, wobei

  $$
  \begin{aligned}
  x^0 &= t, && (10)\\
  x^1 &= r\sin\theta\cos\phi\,, && (11)\\
  x^2 &= r\sin\theta\sin\phi\,, && (12)\\
  x^3 &= r\cos\theta\,. && (13)
  \end{aligned}
  $$

  Geben Sie die Weltlinie des vorherigen Lichtstrahls in diesen Koordinaten an. Verifizieren Sie auch in diesen Koordinaten, dass die Weltlinie tatsächlich lichtartig ist.

  Geben Sie die Parametrisierung eines Lichtstrahles durch den Ursprung an, der sich in radialer Richtung in eine beliebige Richtung ausbreitet; $\theta(\lambda) = \theta_0$ und $\phi(\lambda) = \phi_0$.

- Betrachten Sie nun die Schwarzschild Metrik,

  $$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2\,. \tag{14}$$

  Verwenden Sie den Ansatz, $x^\mu(\lambda) = \{\lambda, r(\lambda), \theta_0, \phi_0\}$ für einen radialen Lichtstrahl $r(\lambda) > r_s$.

  Verlangen Sie, dass der Tangentialvektor der Weltlinie lichtartig ist, und leiten Sie die Bewegungsgleichung für $r(\lambda)$ ab.

- Lösen Sei die Differentialgleichung $(r'(\lambda))^2 = \big(1 - r_s/r(\lambda)\big)^2$. (Eine implizite Relation zwischen r und λ ist ausreichend. Wieviele Lösungen finden Sie und was ist deren Interpretation. Wie sind die Integrationskonstanten zu interpretieren? Skizzieren Sie die radial ein- und auslaufenden Lichtstrahlen in der (t, r)-Halbebene.