

Aufgabe 17 *Kruskal-Szekeres Koordinaten*

Wenden Sie die folgende Koordinatentransformation,

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right)^{1/2} \exp \left(\frac{r}{2r_s} \right) \cosh \left(\frac{t}{2r_s} \right), \\ v &= \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right)^{1/2} \exp \left(\frac{r}{2r_s} \right) \sinh \left(\frac{t}{2r_s} \right), \end{aligned}$$

an und transformieren Sie die Metrik,

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r(u,v)} \exp \left(-\frac{r(u,v)}{r_s} \right) (du^2 - dv^2) + r(u,v)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

von den Koordinaten (u, v, θ, ϕ) System ins (t, r, θ, ϕ) System. Die Funktion $r(u, v)$ ist implizit durch die obigen Gleichungen bestimmt und wird nicht explizit benötigt. Um welche Raumzeit handelt es sich?

Aufgabe 18 *Bewegungsgleichungen des Punktteilchens im elektromagnetischen Feld.*

Gegeben ist die Wirkung eines geladenen Punktteilchens im elektromagnetischen Feld, das mit dem Viererpotentials $A_\mu(x)$ beschrieben wird,

$$S(A_\mu, g_{\mu\nu}, q^\mu) = -\frac{1}{4} \int \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x - m \int ds + e \int A_\mu dq^\mu. \quad (1)$$

Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des elektromagnetischen Potentials $A_\mu(x)$ und des Punktteilchens $x^\mu(\lambda)$ aus dem Variationsprinzip ab.

Schreiben Sie dazu die obige Wirkung zuerst so um, dass die Parametrisierung der Weltlinie explizit eingeht,

$$\int ds := \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(q(\lambda)) \frac{dq^\mu(\lambda)}{d\lambda} \frac{dq^\nu(\lambda)}{d\lambda}} d\lambda, \quad (2)$$

$$\int A := \int A_\mu dq^\mu := \int A_\mu(q^\rho(\lambda)) \frac{dq^\mu(\lambda)}{d\lambda} d\lambda. \quad (3)$$

Der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ ist als "äussere" Ableitung von $A_\nu(x)$ gegeben; $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$.

Aufgabe 19 *Eigenschaften des Energie-Impuls-Tensors.*

Gegeben ist der Energie-Impuls Tensor eines neutralen Punktteilchens und des elektromagnetischen Feldes

$$T_A^{\mu\nu}(x) = F^\mu{}_\rho F^\nu{}_\sigma g^{\rho\sigma} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}, \quad (4)$$

$$T_m^{\mu\nu}(x) = \frac{m}{\sqrt{-g}} \int \frac{dq^\nu(\lambda)}{d\lambda} \frac{dq^\mu(\lambda)}{d\lambda} \delta^{(4)}(x^\rho - q^\rho(\lambda)) d\lambda. \quad (5)$$

Zeigen Sie, dass diese Tensoren symmetrisch sind. Zeigen Sie, dass die Divergenz der Energie-Impuls-Tensoren des Punktteilchens und des elektromagnetischen Feldes jeweils verschwindet; $D_\mu T_m^{\mu\nu} = 0$ und $D_\mu T_A^{\mu\nu} = 0$. (Betrachten Sie das System dazu im flachen Minkowski Raum.)

Aufgabe 20 *Variationsrechnung.*

Gegeben ist ein skalares Feld mit der Wirkung,

$$S(\phi, \partial\phi) = \int \sqrt{-g} dx^4 \left\{ -\frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) - V(\phi) \right\}.$$

- Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen des Feldes ϕ .
- Berechnen Sie den Energie-Impuls-Tensor aus der Variation nach der Metrik.

Nützliche Relationen:

Energie-Impuls-Tensor:

$$\delta_g S(\Phi, g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} dx^4. \quad (6)$$

Variation und Ableitung der inversen Metrik und der Determinante der Metrik:

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (7)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma}, \quad (8)$$

$$\partial_\rho \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu}, \quad (9)$$

$$\partial_\lambda g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \partial_\lambda g_{\rho\sigma}. \quad (10)$$