Übungen ART WS 2014

Aufgabe 21 *Linearität der Poincare Transformationen.*

Eine invertierbare Koordinatentransformation $x'^{\mu} = f^{\mu}(x)$ erhält die Form des Linienelements, wenn $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}\partial_\mu f^\rho(x)\partial_\nu f^\sigma(x)$ gilt. Zeigen Sie, dass mit $det(M) \neq 0$ für $M_\mu{}^\rho = \partial_\mu f^\sigma(x)$ folgt, dass ein solche Koordinatentransformation $f^\mu(x)$ linear in x^μ sein muss

$$f^\mu(x) = L^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu\,. \tag{1}$$

Anleitung: hierzu ist die Invarianzbedingung zuerst abzuleiten $(\partial_\lambda \eta_{\mu\nu})$, und die dannach für geeignete Indexwerte zu summieren.

Aufgabe 22 *Endliche Lorentz Transformationen.*

Berechnen Sie den Tangentialvektoren der Lorentz Transformation im zweidimensionalen Minkowski Raum,

$$L(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \tag{2}$$

$T = \partial_\phi L(\phi)$ am Einheitselement ausgewertet. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung von infinitesimalen Transformationen,

$$\lim_{k\to\infty}(1_{2\times 2} + \frac{\phi}{k}T)^k = Exp(\phi T) = \sum_{n=0,\infty}\frac{\phi^n}{n!}T^n = L(\phi) \tag{3}$$

die endliche Lorentz Transformation (2) ergibt. Hinweis: Dazu ist die matrixwertige Reihenentwicklung in Gleichung (3) in gerade und ungerade Potenzen zu zerlegen.

Aufgabe 23 *Äussere Ableitung.*
Gegeben ist ein Vektorfeld $A_\mu(x)$ mit dem Transformationsverhalten, $A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}A_\nu(x)$ für die Koordinatentransformation $x'^\mu(x)$. Zeigen Sie, dass sich die äussere Ableitung des Vektorfeldes $T_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ wie ein Tensorfeld transformiert.

Aufgabe 24 *Ladungsstrom.*
Zeigen Sie, dass sich die Kopplung des elektromagnetischen Feldes an ein geladenes Punktteilchen als Raumintegral über einen Strom schreiben lässt,

$$\int A_\mu(q(\lambda))\frac{dq^\mu}{d\lambda}d\lambda = \int \sqrt{|g|}dx^4 A_\mu(x)j^\mu(x)\,, \tag{4}$$

$$j^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{g}}\int \frac{dq^\mu(\lambda)}{d\lambda}\delta^{(4)}(x - q(\lambda))d\lambda\,. \tag{5}$$

Zeigen Sie weiters, dass der Ausdruck für den Strom unabhängig ist von der Wahl der Parametrisierung der Weltlinie. Verifizieren Sie, dass der Strom im flachen Raum erhalten ist,

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0\,. \tag{6}$$