Übungen ART WS 2014

Aufgabe 25 *Maxwell Gleichungen im Minkowskiraum.*
Die Maxwell Gleichungen im Vakuum sind durch folgende Differentialgleichungen gegeben,

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = 4\pi \mathbf{J}\,, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = 0\,, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho\,, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0\,, \tag{2}$$

worin $\mathbf{J}$ und ρ für Strom und Ladungsdichten stehen.

Der antisymmetrische Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ ist durch die Relationen $F^{0i} = E^i$, $(i = x, y, z)$ und $F^{xy} = B^z, F^{yz} = B^x, F^{zx} = B^y$ bestimmt. Geben Sie $F^{\mu\nu}$ in Matrixform an.

Eine Rotation um die z-Achse ist eine zulässige Lorentz Transformation. Zeigen Sie, dass diese Lorentz Transformation des Feldstärketensors zu einer Rotation der drei-dimensionalen Vektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ führt.

Verwenden Sie die Form des Viererstroms $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$, und zeigen Sie, dass sich zwei der Maxwell Gleichungen aus den Tensor Gleichungen,

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\mu\,, \tag{3}$$

ableiten lassen.

Zeigen Sie weiters, dass sich die verbleibenden Maxwell Gleichungen aus der folgenden Relation ergeben

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass die Stromerhaltung $\partial_\mu J^\mu = 0$ aus den Tensorgleichungen folgt.

Aufgabe 26 *Gekrümmter Raum in Erdnähe.*
Die Metrik der Raumzeit nahe der Erdoberfläche ist durch $ds^2 \sim -(1+2U)dt^2 + (1-2U)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$ gegeben mit $U = -G_N M/r$. Die Koordinate r ist eine radiale Koordinate ausgehend vom Erdzentrum.

a) Nehmen Sie zwei Beobachter an den Positionen R_1 und R_2 ($R_2 > R_1$) vom Erdzentrum entfernt an. Berechnen Sie die Eigenzeit, die für die Beobachter während eines Zeitintervals Δt der Koordinatenzeit t vergeht. Wessen Uhr geht schneller?

b) Berechnen und lösen Sie die Bewegungsgleichungen eines Punktteilchens, das sich auf einem kreisförmigen Orbit um den Äquator bewegt; $\{q^\mu(t)\} = \{t, r(t), \theta(t), \phi(t)\}$ mit $\theta = \pi/2$ und $r = R_\oplus$. Berechnen Sie die Funktion $d\phi(t)/dt$. Können Sie die Wahl des Vorfaktors des Potentials in der Metrik $ds^2 = -(1+2U)dt^2 + \ldots$ interpretieren?

c) Wieviel Zeit vergeht für ein Teilchen, das sich entlang des kreisförmigen Orbits um die Erde bewegt? Wieviel Zeit vergeht dabei für einen Beobachter auf der Erdoberfläche? Setzen Sie explizite Werte ein und geben Sie die Zahlenwerte an.

Aufgabe 27 *Energie-Impuls Tensor einer idealen Flüssigkeit.*
Gehen Sie von einer idealen Füssigkeit (charakterisiert durch Druck $p(x)$, Dichte $\rho(x)$ und Geschwindigkeitsfeld $U^\mu(x)$). Analysieren Sie die Gleichungen der Divergenzfreiheit des Energie-Impuls Tensors $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$,

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho(x) & & & \\ & p(x) & & \\ & & p(x) & \\ & & & p(x) \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung, $U_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ die Kontinuitätsgleichung, $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ impliziert.

b) Zeigen Sie, dass die transversen Gleichungen, $(\delta^i_\nu + U^i U_\nu))\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, die Euler Gleichungen implizieren, $\rho\,(\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}) + \vec{\nabla} p = 0\,.$

Bemerkungen: Der nichtrelativistische Limes einer langsam fliessenden Flüssigkeit ergibt sich aus der Näherung

$$U^\mu \sim \{1, v^i\}\,, \quad v^i v^i \ll 1\,, \quad \rho \gg p\,. \tag{6}$$

Weiters tragen Zeitableitungen ∂_t zur gleichen Ordnung bei wie die räumlichen Ableitungen $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$.